N° 3.

The origin of this paper is probably related to that of N° 2, although neither of the two papers contains an explicit reference to the other. It can be supposed, in fact, that Fermi, after the study of the relations between gravitational and electromagnetic fields, made in N° 2 under rather restrictive conditions, felt the opportunity of a more systematic treatment of this and other similar problems, by means of a system of space-time coordinates particularly fitted to follow the behaviour in time of phenomena happening in a small spatial region. He was so conducted to this paper, which, except in the last part, is essentially the demonstration of a theorem of absolute differential calculus. This theorem is of considerable interest for the applications, and is therefore reproduced in the most important treatises of absolute differential calculus (see e.g.: T. Levi-Civita, *Calcolo Differenziale Assoluto*, Roma 1925, p. 190; also, in English translation: *Absolute Differential Calculus*, Glasgow 1927, p. 167). Later, it has been extended by L. P. Eisenhart to a certain class of non-riemannian spaces (see L. P. Eisenhart, *Non-Riemannian Geometry*, New York 1927) and by P. Dienes to any linearly connected space (see « Rend. Acc. Linc. », *18*, (6), p. 369 (1933)). A possible extension to Weyl's space is also suggested in Fermi's paper. For a detailed derivation and discussion see also: L. O. Raifertaigh, *Fermi Coordinates*, Proc. Roy. Irish Acad., 59 A, p. 15 (1958). Extensive use of "Fermi coordinates" is made in J. L. Synge, *Relativity, the General Theory* (Amsterdam, 1960).

E. PERSICO

3.

SOPRA I FENOMENI CHE AVVENGONO IN VICINANZA DI UNA LINEA ORARIA

« Rend. Lincei », *31* (1), 21–23, 51–52, 101–103 (1922) (*).

NOTA I.

1. Per fare lo studio dei fenomeni che avvengono in vicinanza di una linea oraria, cioè, in linguaggio non relativistico, in una porzione di spazio, variabile eventualmente col tempo, ma sempre molto piccola in confronto alle divergenze dall'euclideità, della varietà spazio–tempo, converrà anzi tutto ricercare un opportuno riferimento tale che, in vicinanza della linea studiata, il ds^2 della varietà prenda una forma semplice. Per trovare questo riferimento, dobbiamo premettere qualche considerazione geometrica.

Sia data in una varietà riemanniana V_n, od anche in una varietà metricamente connessa nel senso di Weyl [1], una linea L. Associamo ad ogni punto P di L una direzione y, perpendicolare ad L, con la legge che la direzione $y + dy$, relativa al punto $P + dP$, si deduca da quella y relativa

(*) Presentate dal Corrispondente G. Armellini nella seduta del 22 gennaio 1922.

(1) WEYL, *Raum, Zeit, Materie*, p. 109. Berlin, Springer, 1921.

a P, nel seguente modo: Sia η la direzione tangente ad L in P; si trasportino parallelamente [2] y, η da P in $P + dP$ e siano $y + \delta y$, $\eta + \delta\eta$ le direzioni così ottenute, che per le proprietà fondamentali del trasporto parallelo saranno ancora ortogonali. Se L non è geodetica $\eta + \delta\eta$ non coinciderà con la direzione $\eta + d\eta$ della tangente ad L in $P + dP$, e queste due direzioni individueranno in $P + dP$ una giacitura. Consideriamo in $P + dP$ l'elemento di S_{n-2} perpendicolare ad essa e ruotiamo rigidamente attorno a tale S_{n-2} tutta una particella circostante $P + dP$, fino a che $\eta + \delta\eta$ non vada a sovrapporsi ad $\eta + d\eta$. Allora $y + \delta y$ andrà a finire in una posizione che prenderemo come direzione $y + dy$ relativa al punto $P + dP$. Si intende bene come, fissata a piacere la direzione y in un punto di L, un processo di integrazione permetta di conoscerla per tutti i punti di L.

Cerchiamo ora le espressioni analitiche traducenti le operazioni indicate per una varietà riemanniana, che sono identiche a quelle valevoli per una varietà metrica di Weyl purché si abbia l'avvertenza di scegliere la « Eichung » in guisa che la misura di un segmento, che si muova rigidamente nelle vicinanze di L, sia costante. Sia

$$ds^2 = \sum_{ik} g_{ik}\, dx_i\, dx_k \qquad (i, k = 1, 2, \cdots, n) \tag{1}$$

e siano y_i, $y^{(i)}$; η_i, $\eta^{(i)} = \frac{dx_i}{ds}$ i sistemi co– e controvarianti delle direzioni y, η. Avremo intanto

$$\frac{\delta\eta^{(i)}}{ds} = -\sum_{hl} \left\{ \begin{matrix} hl \\ i \end{matrix} \right\} \eta^{(h)} \frac{dx_l}{ds} = -\sum_{hl} \left\{ \begin{matrix} hl \\ i \end{matrix} \right\} \frac{dx_h}{ds} \frac{dx_l}{ds},$$

è inoltre $\frac{d\eta^i}{ds} = \frac{d}{ds}\frac{dx_i}{ds} = \frac{d^2 x_i}{ds^2}$. Si trova dunque

$$\frac{\delta\eta^{(i)} - d\eta^{(i)}}{ds} = -\left(\frac{d^2 x_i}{ds^2} + \sum_{hl} \left\{ \begin{matrix} hl \\ i \end{matrix} \right\} \frac{dx_h}{ds} \frac{dx_l}{ds} \right) = -C^i.$$

Le C^i sono le componenti controvarianti del vettore $\mathbf{C}$, curvatura geodetica, cioè di un vettore che ha l'orientazione della normale principale geodetica di L e grandezza eguale alla sua curvatura geodetica.

Si ha d'altra parte

$$\frac{\delta y^{(i)}}{ds} = -\sum_{hk} \left\{ \begin{matrix} hk \\ i \end{matrix} \right\} y^{(h)} \frac{dx_k}{ds}. \tag{2}$$

Ora, siccome y è perpendicolare ad L, lo spostamento, con cui da $y + \delta y$ si deduce $y + dy$, sarà parallelo alla tangente ad L e avrà grandezza eguale alla proiezione sopra y stesso di $\delta\eta - d\eta$; vale a dire, siccome y ha lunghezza 1, al prodotto scalare di $\delta\eta - d\eta$ per y, cioè

$$\sum_i (\delta\eta_i - d\eta_i)\, y^{(i)} = -ds \sum_i C_i\, y^{(i)}.$$

(2) T. Levi-Civita, « Rend. Circ. Palermo », tomo XLII, p. 173 (1917).

Le sue componenti controvarianti si otterranno dunque moltiplicando la sua grandezza per le coordinate controvarianti della tangente ad L, cioè dx_i/ds. Esse son dunque, in ultima analisi, $-dx_i \sum_r C_r y^{(r)}$. Da (2) risulta ora immediatamente

$$\frac{dy^{(i)}}{ds} = -\sum_{hk} \left\{ \begin{matrix} h\,k \\ i \end{matrix} \right\} y^{(h)} \frac{dx_k}{ds} - \frac{dx_i}{ds} \sum_h C_h y^h. \tag{3}$$

La (3), scritta per $i = 1, 2, \cdots, n$, dà un sistema di n equazioni differenziali del primo ordine tra le n incognite $y^{(1)} y^{(2)} \ldots y^{(n)}$ che risultano così determinate, una volta che ne siano assegnati i valori iniziali. Sarebbe anche facile verificare formalmente dalle (3) che, se i valori iniziali delle $y^{(i)}$ soddisfano la condizione di perpendicolarità ad L, tale condizione resta verificata lungo tutta la linea.

2. In un punto P_0 di L assegnamo ora a piacere n direzioni $y_1, y_2, \cdots, y_n$ mutuamente ortogonali, con la condizione che y_n sia tangente ad L. Le direzioni $y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}$ saranno perpendicolari ad L e potremo trasportarle lungo L con la legge assegnata al paragrafo precedente che, come è evidente dalla sua stessa definizione, conserva la loro ortogonalità. In tale modo veniamo ad associare ad ogni punto di L n direzioni mutuamente ortogonali, di cui l'ultima è quella della tangente ad L. Pensiamo ora la nostra V_n immersa in un S_N euclideo a un numero conveniente di dimensioni. Possiamo prendere come coordinate di un punto di V_n le coordinate cartesiane ortogonali della sua proiezione sopra l'S_n tangente a V_n in un punto generico P di L, aventi per origine P e per direzioni le direzioni $y_1, y_2, \cdots, y_n$ relative al punto P. Con tali coordinate l'elemento metrico di V_n in P prende la forma $ds^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + \cdots + dy_n^2$; esse inoltre, come immediatamente si riconosce, sono geodetiche in P. Vale a dire, per le coordinate y si può nell'intorno di P porre, a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo, $g_{ii} = 1$; $g_{ik} = 0$ $(i \neq k)$. È manifesto che di tali riferimenti ne avremo uno per ogni punto di L. Consideriamo ora un punto Q_0 di V_n che nel riferimento relativo al punto P_0 di L abbia coordinate $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_{n-1}, 0$. Per ogni altro punto P di L possiamo allora determinare un punto Q che, nel riferimento relativo a P, abbia le stesse coordinate che ha Q_0 nel riferimento relativo a P_0. Il punto Q percorrerà così una linea di decorso parallelo ad L. Vogliamo ora trovare la relazione che lega ds_Q a ds_P nell'ipotesi che Q sia infinitamente prossimo a P. Perciò osserviamo che lo spostamento che porta Q in $Q + dQ$ è composto degli spostamenti indicati al § 1 con δ e con $d - \delta$ e che il primo, essendo uno spostamento parallelo, fornisce, a meno di infinitesimi di ordine superiore, $\delta s_Q = ds_P$; il secondo è una rotazione che, come si è visto al § 1, dà $(d - \delta)\, s_Q = ds_P\, \mathbf{C} \cdot (Q - P)$, se con $\cdot$ si indica il simbolo del prodotto scalare e con $Q - P$ il vettore di origine P e termine Q. Inoltre ds_Q e $(d - \delta)\, s_Q$ hanno entrambi la direzione della tangente in L. Si ha dunque $ds_Q = \delta s_Q + (d - \delta)\, s_Q$; cioè

$$ds_Q = ds_P\, [1 + \mathbf{C} \cdot (Q - P)]. \tag{4}$$

Le traiettorie dei punti Q formano una $(n-1)^{\text{upla}}$ infinità di linee e quindi, almeno con opportune limitazioni, per ogni punto M di V_n passerà una di tali linee; così che potremo caratterizzare M mediante le coordinate del punto Q, $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_{n-1}$ corrispondenti alla linea passante per M, e l'arco s_P di linea L contato da un'origine arbitraria fino a quel punto P che corrisponde al Q coincidente con M.

Se M è infinitamente prossimo ad L, ds_Q sarà perpendicolare alla ipersuperficie $s_P =$ costante. Si avrà perciò

$$ds_M^2 = ds_Q^2 + d\bar{y}_1^2 + d\bar{y}_2^2 + \cdots + d\bar{y}_{n-1}^2\,;$$

e, tenendo presente (4),

$$ds_M^2 = [1 + \mathbf{C}\cdot(\mathrm{M}-\mathrm{P})]^2\, ds_P^2 + d\bar{y}_1^2 + d\bar{y}_2^2 + \cdots + d\bar{y}_{n-1}^2\,. \tag{5}$$

Nelle vicinanze di L abbiamo con ciò trovata una espressione semplicissima del ds^2.

NOTA II.

3. Prima di passare all'applicazione fisica dei risultati ottenuti, vogliamo ancora fare qualche osservazione geometrica. È evidente intanto che le considerazioni precedenti, e quindi anche la formula (5) che ne è la conclusione, che per varietà qualunque sono valide solo vicino ad L, sono invece completamente rigorose per spazî euclidei. Associamo allora alla linea L della V_n una linea L* di uno spazio euclideo S_n, in cui indichiamo con x_i^* le coordinate cartesiane ortogonali. Se con degli asterischi indichiamo i simboli riferentisi alla linea L*, potremo scrivere per S_n la formula analoga a (5):

$$ds_{M^*}^2 = [1 + \mathbf{C}^*\cdot(\mathrm{M}^*-\mathrm{P}^*)]\, ds_{P^*}^2 + d\bar{y}_1^{*2} + d\bar{y}_2^{*2} + \cdots + d\bar{y}_{n-1}^{*2}\,; \tag{5*}$$

come nella (5) **C** è funzione di s_P, così nella (5)* **C*** è funzione di s_{P^*}.

Siano $K^{(1)} K^{(2)}, \ldots, K^{(n-1)}$ le componenti controvarianti di **C** relative a $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \cdots, \bar{y}_{n-1}$ e $K^{(1)*}, K^{(2)*}, \ldots, K^{(n-1)*}$ quelle di **C*** relative alle $\bar{y}^*$. Cerchiamo se si possa determinare L* in modo che le funzioni $K^{(r)*}(s_P)$ diventino eguali alle $K^{(r)}(s_P)$. Cominceremo perciò a porre $s_P = s_{P^*}$, cioè a stabilire tra i punti di L e quelli di L* una corrispondenza biunivoca che conserva gli archi. Osserviamo poi che $K^{(r)*}$ è la proiezione di **C*** sulla r^{esima} direzione y^*. È cioè

$$K^{(r)*} = \sum_{i=1}^{i=n} y_{i/r}^* \frac{d^2 x_i^*}{ds_P^2} \qquad (r = 1, 2, \cdots, n-1). \tag{6}$$

Le $K^{(r)}$ sono poi funzioni note di s_P. La condizione $K^{(r)} = K^{(r)*}$ conduce dunque alle $(n-1)$ equazioni

$$K^{(r)}(s_P) = \sum_{i=1}^{i=n} y_{i/r}^* \frac{d^2 x_i^*}{ds_P^2} \qquad (r = 1, 2, \cdots, n-1). \tag{7}$$

D'altra parte le (3), scritte per l'S_n, ci dànno $n(n-1)$ altre equazioni. Se a queste aggiungiamo l'altra

$$ds_P^2 = dx_1^{*2} + dx_2^{*2} + \cdots + dx_n^{*2}, \tag{8}$$

troviamo un sistema di $n - 1 + n(n-1) + 1 = n^2$ equazioni tra le n^2 incognite x_i^*, $y_{i/r}^*$ che servono ad esprimerle in funzione di s_P. Possiamo così determinare le equazioni parametriche $x_i^* = x_i^*(s_P)$ della L*. Con ciò la formula (5*) diventa identica alla (5), ossia abbiamo rappresentato per applicabilità i dintorni delia linea L*, sui dintorni di L. Siccome poi L* è in uno spazio euclideo, possiamo dire anche di aver disteso i dintorni di L in uno spazio euclideo, ossia di aver trovato coordinate che sono geodetiche contemporaneamente in tutti i punti di L.

NOTA III.

§ 4. Per mostrare l'applicazione dei risultati precedenti alla teoria della relatività, supporremo che V_n sia la V_4 spazio–tempo e che L sia una linea oraria, in vicinanza della quale ci proponiamo di studiare i fenomeni. Ponendo per brevità in (5) $ds_M = ds$, si trova in questo caso:

$$ds^2 = [1 + \mathbf{C}\cdot(M - P)]^2 ds_P^2 + d\bar{y}_1^2 + d\bar{y}_2^2 + d\bar{y}_3^2.$$

Per evitare la comparsa di immaginarii e ristabilire l'omogeneità, conviene fare la seguente sostituzione di variabili:

$$s_P = vt \quad ; \quad \bar{y}_1 = ix \quad ; \quad \bar{y}_2 = iy \quad ; \quad \bar{y}_3 = iz \ ,$$

essendo v una costante con le dimensioni di una velocità, per modo che t abbia le dimensioni di un tempo. Si ottiene, così,

$$ds^2 = a\,dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{9}$$

dove

$$a = v^2[1 + \mathbf{C}\cdot(M - P)]^2. \tag{10}$$

Da ora in avanti, con gli ordinarii simboli del calcolo vettoriale intenderemo riferirci allo spazio x, y, z. Ed è in questo senso che si può intendere il prodotto scalare che figura in (10), purché per $\mathbf{C}$ si intenda il vettore avente per componenti le componenti covarianti della curvatura geodetica della linea $x = y = z = 0$ e con $M - P$ il vettore di componenti x, y, z. Chiameremo x, y, z coordinate di spazio e t tempo. Per uniformità scriveremo talvolta x_0, x_1, x_2, x_3 al posto di t, x, y, z e chiameremo anche g_{ik} i coefficienti della forma quadratica (9).

§ 5. Sia [3] F_{ik} il campo elettromagnetico e $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ il tensore di primo ordine «potenziale» di F_{ik}, in modo che sia $F_{ik} = \varphi_{ik} - \varphi_{ki}$.

(3) Per le notazioni e per la deduzione Hamiltoniana delle leggi della fisica, vedi WEYL., op. cit., pp. 186 e 208.

Poniamo $\varphi_0 = \varphi$ e chiamiamo $\boldsymbol{u}$ il vettore di componenti $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Si avrà intanto:

$$\left.\begin{matrix} F_{01} \\ F_{02} \\ F_{03} \end{matrix}\right\} = \operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} \quad ; \quad \left.\begin{matrix} F_{23} \\ F_{31} \\ F_{12} \end{matrix}\right\} = - \operatorname{rot} \boldsymbol{u} \,, \; F_{ii} = 0 \,, \; F_{ik} = - F_{ki} \,,$$

parimenti

$$\left.\begin{matrix} F^{01} \\ F^{02} \\ F^{03} \end{matrix}\right\} = \frac{1}{a}\left(- \operatorname{grad} \varphi + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\right) \quad , \quad \left.\begin{matrix} F^{(23)} \\ F^{(31)} \\ F^{(12)} \end{matrix}\right\} = - \operatorname{rot} \boldsymbol{u} \,, F^{(ii)} = 0 \,, F^{(ik)} = - F^{(ki)}$$

e quindi

$$\frac{1}{4} \sum_{ik} F_{ik} F^{(ik)} = \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{rot}^2 \boldsymbol{u} - \frac{1}{a}\left(\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\right)^2 \right\} .$$

Sia $d\omega$ l'elemento di ipervolume di V_4. Avremo

$$d\omega = \sqrt{- \| g_{ik} \|} \, dx_0 \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 = \sqrt{a} \, dt \, d\tau$$

dove $d\tau = dx \, dy \, dz$ è l'elemento di volume dello spazio.

Si ha anche:

$$\Sigma \varphi_i \, dx_i = \varphi \, dt + \boldsymbol{u} \cdot d\mathrm{M} \qquad d\mathrm{M} = (dx \,, dy \,, dz) .$$

Prescindendo dall'azione del campo metrico, la cui variazione è nulla perché lo riguardiamo come dato *a priori* dalla (9), l'azione prenderà la seguente forma:

$$W = \frac{1}{4} \int_{\omega} \sum_{ik} F_{ik} F^{(ik)} \, d\omega + \int_{e} de \int \sum_{i} \varphi_i \, dx_i + \int_{m} dm \int ds$$

$$\begin{pmatrix} de & = \text{elemento di carica elettrica} \\ dm & = \text{elemento di massa} \end{pmatrix} .$$

Introducendo le notazioni indicate, si trova

$$W = \frac{1}{2} \iint \left\{ \operatorname{rot}^2 \boldsymbol{u} - \frac{1}{2}\left(\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\right)^2 \right\} \sqrt{a} \, dt \, d\tau$$
$$+ \iint (\varphi + \boldsymbol{u} \cdot \mathbf{V}_L) \, \rho \, d\tau \, dt + \iint \sqrt{a - V_M^2} \, k \, d\tau \, dt , \tag{11}$$

dove ρ, k sono rispettivamente le densità di elettricità e di materia, per modo che $de = \rho \, d\tau$, $dm = k \, d\tau$, $\mathbf{V}_L$ è la velocità delle cariche elettriche, $\mathbf{V}_M$ quella delle masse.

Gli integrali del secondo membro possono estendersi ad un campo arbitrario τ tra due tempi qualunque t_1, t_2. Si ha poi il vincolo che sul contorno del campo τ, e per i due tempi t_1, t_2, siano nulle tutte le variazioni.

All'infuori di queste condizioni, le variazioni di φ e di $\boldsymbol{u}$ sono completamente arbitrarie. Per contro, alle variazioni di x, y, z, considerate come coordinate di un elemento di carica o di massa, possono essere imposte ulteriori condizioni, traducenti i vincoli del particolare problema che si sta studiando. Scrivendo intanto che è nullo dW per una variazione qualunque $\delta\varphi$ di φ, si trova

$$0 = -\iint \left(\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\right) \cdot \delta \operatorname{grad}\varphi \frac{dt\, d\tau}{\sqrt{a}} + \iint \delta\varphi\, \rho\, dt\, d\tau.$$

Trasformando il primo integrale con opportuna applicazione del teorema di Gauss, e tenendo presente che $\delta\varphi$ si annulla sul contorno, troviamo

$$0 = \iint \delta\varphi \left\{ \rho + \operatorname{div}\left[\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\right)\right]\right\} dt\, d\tau$$

e, siccome $\delta\varphi$ è arbitrario, abbiamo intanto l'equazione

$$\rho + \operatorname{div}\left\{\left[\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\right)\right]\right\} = 0. \tag{12}$$

In modo analogo, facendo variare $\boldsymbol{u}$, si trova

$$\rho V_L + \operatorname{rot}(\sqrt{a}\operatorname{rot}\boldsymbol{u}) - \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\right)\right] = 0. \tag{13}$$

Queste due ultime equazioni permettono di determinare il campo elettro–magnetico, una volta assegnate le cariche ed il loro movimento.

Un altro gruppo di equazioni si può ottenere facendo variare in W le traiettorie delle cariche e delle masse. Siano δP_M la variazione della traiettoria delle masse, δP_L quella delle cariche. Indichiamo inoltre, essendo $\boldsymbol{u}$ un vettore funzione di punto e $\mathbf{V}$ un vettore, con $(\partial\boldsymbol{u}/\partial P)(\mathbf{V})$ il vettore di componenti $\frac{\partial u_x}{\partial x} V_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} V_y + \frac{\partial u_x}{\partial z} V_z$ ed analoghe. Scrivendo che è nulla la variazione di W, si trova allora, coi soliti artifici:

$$\iint \left(\delta P_L \cdot \operatorname{grad}\varphi - \delta P_L + \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial P}(\mathbf{V}_L)\right) + \mathbf{V}_L \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial P}(\delta P_L)\right) \rho\, dt\, d\tau \tag{14}$$

$$+ \iint \delta P_M \cdot \left\{ \frac{dt}{ds}\, \frac{\operatorname{grad} a}{2} + \frac{d}{dt}\left(\frac{dt}{ds}\mathbf{V}_M\right)\right\} k\, dt\, d\tau = 0.$$

Se i δP ad un tempo non dipendono dai loro valori per altri tempi, dovrà essere nullo in (14) il coefficiente di dt. Si trova così:

$$\int \left\{ \delta P_L \cdot \operatorname{grad}\varphi - \delta P_L \left[\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial P}(\mathbf{V}_L)\right] + \mathbf{V}_L \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \mathbf{P}}(\delta P_L)\right\} \rho\, d\tau \tag{15}$$

$$+ \int \delta P_M \cdot \left\{ \frac{1}{2} \frac{dt}{ds} \operatorname{grad} a + \frac{d}{dt}\left(\frac{dt}{ds}\mathbf{V}_M\right)\right\} k\, d\tau$$

che deve essere verificata per tutti i sistemi di δP soddisfacenti ai vincoli.